Beschleunigte Berechnung von elektrischen Netzwerken zur Lösung von EMV Optimierungsproblemen

Dipl.-Wirt.-Ing. Katharina Feldhues, Prof. Dr.-Ing. Stephan Frei,
Technische Universität Dortmund, Arbeitsgebiet Bordsysteme

1 Einleitung

Zur Bestimmung von Worst- oder Best-Case-Szenarien in der EMV kann oft eine Simulation verwendet werden. In der Simulation ist es möglich, durch Parametervariation viele verschiedene Testfälle zu analysieren. Hierbei werden oft nur kleine Teile einer Schaltung, wie bei der Optimierung von Filtern meist nur die Filterstruktur, variiert, während der größte Teil, z.B. die komplexe Sende- und Empfangsschaltung, konstant bleiben. Dafür werden in der Simulation die Werte von Bauteilen mit einem Parameter-Sweep variiert. Bei größeren Netzwerken bedeutet dies einen hohen Rechenaufwand und eine lange Simulationszeit. Für die Parametervariation muss jedoch nur ein sehr geringer Anteil der Schaltung immer wieder verändert werden. Der überwiegende Teil bleibt unverändert. Die Zerlegung einer Matrix kann bei einer Parametervariation helfen die Simulationszeit zu verkürzen.
Anwendung findet die Matrixzerlegung bei Netzwerken, in denen nur einzelne wenige Bauteile mit Hilfe einer Parametervariation verändert werden sollen. Ist zur Simulation eine große Matrix notwendig und ein bestimmtes oder wenige Bauteile werden variiert, muss nur in einem kleinen Teil der Matrix eine Veränderung der Matrixeinträge vorgenommen werden. Im Bild 1 ist eine solche Matrix schematisch dargestellt. Der schwarze Kasten verdeutlicht die gesamte Matrix, diese ist sehr groß. In dem orange eingefärbten Teil soll die Parametervariation stattfinden, nur dieser kleine Teil der Matrix muss immer neu berechnet werden. Der rot schraffierte Bereich muss nur einmalig invertiert werden, dadurch kann die Simulationszeit reduziert werden. Ohne eine Matrixzerlegung wird für jeden neuen Parametersatz die gesamte Matrix (schwarzer Kasten) invertiert. Kann der Bereich, in dem die Parametervariation durchgeführt wird, lokal begrenzt werden, so kann die Matrix zerlegt werden. Durch die Matrixzerlegung [1] muss nicht die Inverse der gesamten Matrix gebildet werden. Dadurch kann die Laufzeit der Berechnung verringert werden.

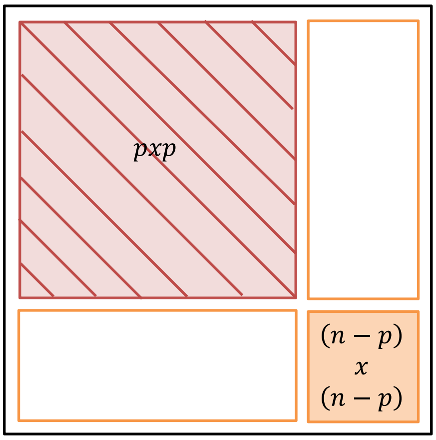


Bild 1: Hypermatrix

In diesem Beitrag wird ein Berechnungsverfahren vorgestellt, das viele typische EMV-Probleme, die mit Hilfe einer Simulation analysiert werden können, in deutlich kürzerer Zeit berechnet. Unter der Voraussetzung, dass in einem Netzwerk nur ein kleiner Teil variiert wird, kann mit der Matrixzerlegung eine schnellere Berechnung durchgeführt werden. Als Referenzlösungsmethode wird die direkte Bildung der Inversen verwendet. Die Laufzeiten der beiden Verfahren werden verglichen. Dies geschieht mit Hilfe von verschiedenen Beispielen. Zuerst wird ein sehr einfaches Beispiel berechnet. Anschließend wird eine Punkt-zu-Punkt-Verbindung eines Bussystems analysiert, bei dem der Filter am Ende der Leitung variiert wird.

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt wird zuerst kurz die Knotenpotentialanalyse vorgestellt. Die Knotenpotentialanalyse wird zum Aufstellen eines Gleichungssystems in der Netzwerkanalyse verwendet (z.B. [2], [3]). Zum Lösen des Gleichungssystems im Frequenzbereich muss für jeden Frequenzpunkt die Inverse der gesamten Matrix neu gebildet werden. Die Berechnung der Inversen ist sehr rechenintensiv. Hierbei kann die Berechnung der Inversen mit Hilfe der Matrixzerlegung eine Zeitersparnis bringen. Wird das Netzwerk im Zeitbereich analysiert, so führt die Knotenpotentialanalyse zu einem Differentialalgebraisches Gleichungssystem (DAE). Zum Lösen der Gleichungen können verschiedene numerische Lösungsverfahren verwendet werden. Sind die Zeitschritte und Schaltungsparameter konstant, wird die Inverse $\mathbf{M^{-1}}$ einmal zu Beginn der Zeitbereichssimulation bestimmt und anschließend für jede Funktionsauswertung verwendet. Bei einer Parametervariation, variablen Zeitschritten oder nichtlinearen Bauelementen kann zu jedem Zeitschritt eine Invertierung notwendig sein. In diesem Fall kann eine Matrixzerlegung bei der Zeitbereichsanalyse eine Verringerung der Laufzeit bedeuten.
Abschließend werden die Laufzeiten für die Bestimmung der Inversen für die Gesamtmatrix und für die Bestimmung der Inversen mit der Matrixzerlegung gegenübergestellt.

2.1 Knotenpotentialanalyse

Für die Analyse von Schaltungen wird in der Regel die Modifizierte Knotenpotentialanalyse (MNA) verwendet [3]. Für die Analyse im Frequenzbereich ergibt sich damit das folgende Gleichungssystem.

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{s}) \tag{1}$$

In diesem Gleichungssystem soll der Vektor $\mathbf{X}(\boldsymbol{s})$ bestimmet werden. In der Übermatrix $\mathbf{M}$ sind die gesamten Informationen der Schaltung enthalten. Die Inverse der gesamten Matrix ($\mathbf{M^{-1}}$) muss für jeden Frequenzpunkt neu berechnet werden.
Ist eine Berechnung im Zeitbereich notwendig, wird das Netzwerk als Differentialalgebraisches Gleichungssystem (DAE) beschrieben [3].

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{x}}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{w}(\mathbf{t}) \tag{2}$$

Auch hier wird der Vektor $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ bestimmt. Hier wird exemplarisch das Euler-Verfahren zum Lösen des Gleichungssystems verwendet. Für das implizite Eulerverfahren wird die Ableitung durch die Rückwärtsdifferenz (z.B. [4], [5])

$$\dot{\mathbf{x}}_{\boldsymbol{k+1}} = \frac{\mathbf{x}_{\boldsymbol{k+1}} - \mathbf{x}_{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{\Delta t}} \tag{3}$$

ersetzt. So entsteht:

$$\mathbf{x_{k+1}} = (\mathbf{\Delta t} \cdot \mathbf{G} + \mathbf{C})^{\mathbf{-1}} \cdot (\mathbf{\Delta t} \cdot \mathbf{w_{k+1}} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{x_k}) \tag{4}$$

Mit $\mathbf{M} = (\Delta t \cdot \mathbf{G} + \mathbf{C})$ und $\mathbf{b} = (\Delta t \cdot \mathbf{w}_{k+1} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_k)$ entsteht bei der Analyse eines Netzwerkes das folgende Gleichungssystem, welches gelöst werden muss.

$$\mathbf{x} = \mathbf{M^{-1}} \cdot \mathbf{b} \tag{5}$$

Die Matrix $\mathbf{M}$ ist abhängig von der Schrittweite Δt. Wie zuvor erwähnt muss die Inverse der Matrix nur unter bestimmten Umständen für jeden Zeitschritt neu bestimmt werden. In diesem Beitrag wird exemplarisch auf die Frequenzbereichsanalyse eingegangen.

2.2 Hypermatrix

Ist die Invertierung einer großen Matrix wiederholt notwendig, und es ändern sich jeweils nur wenige Matrixelemente, kann durch eine Zerlegung in vier kleinere Untermatrizen die Berechnungszeit reduziert werden. Die Gesamtmatrix wird Hyper- oder Übermatrix [1, 4] genannt und folgendermaßen in vier Untermatrizen zerlegt. [1]

$$\mathbf{M}_{(n,n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(p;p)} & \mathbf{B}_{(p;n-p)} \\ \mathbf{D}_{(n-p;p)} & \mathbf{E}_{(n-p;n-p)} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Zur Bestimmung der Inversen einer Matrix können sowohl die Determinante und die Adjunkten der Matrix verwendet werden:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{det(M)}} \cdot \mathbf{adj(M)} = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} - \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{D} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Dies kann umgeformt werden zu [1]:

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Mit:

$$\mathbf{S} = \left(\mathbf{E} - \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1} \tag{9}$$

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BS} \tag{10}$$

$$\mathbf{R} = -\mathbf{SDA}^{-1} \tag{11}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{BR}) \tag{12}$$

Diese Berechnung hat bei der Parametervariation einen großen Vorteil. Die Anzahl der notwendigen Rechenschritte kann reduziert werden, da nicht für jede Berechnung die Inverse der gesamten Matrix neu berechnet werden muss.

2.3 Laufzeit

Zur Bestimmung der Laufzeit werden die rechenzeitintensiven Umformungen der Berechnungsmethoden untersucht. Die Laufzeit ist abhängig von der Größe der Hypermatrix ($n \in \mathbb{N}$), der Größe der Teilmatrix $\mathbf{A}$ ($p \in \mathbb{N}$) und dem verwendenden Rechner.
Die Laufzeit zur Berechnung einer Inversen besitzt eine kubische Ordnung. Somit nimmer die Laufzeit kubisch mit der Größe der Matrix zu. Wird die Matrix $\mathbf{M}$ aus (1) für jeden Frequenzpunkt berechnet, so sind $f \cdot n^3$ Berechnungen notwendig. Durch eine Parametervariation ist die Invertierung mehrfach notwendig. Das heißt, die gesamte Matrix muss wiederholt, abhängig von der Anzahl der Parametervariationen, invertiert werden.
Zur Reduktion der Laufzeit wird die Matrixzerlegung angewendet. Für die Größe der Untermatrizen gilt:

$$\boldsymbol{p} \gg (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}) \tag{13}$$

Das bedeutet, dass eine große Matrix $\mathbf{A}$ abgetrennt wird. Wenn nun eine Parametervariation nur in der Matrix $\mathbf{E}$ stattfindet (siehe (6)), kann die Laufzeit reduziert werden. Mit Hilfe der Berechnungen (9)- (12) wird die Inverse bestimmt. Die Inverse der Matrix A wird einmal zu Beginn der Parametervariation berechnet, da diese unabhängig von den variierten Parametern sind. Die gesamte Inverse in Gleichung (9) ist lediglich eine

$(n-p)x(n-p)$ Matrix und im Vergleich zu der Gesamtmatrix sehr klein. Durch diese Inverse entsteht eine Laufzeit der Ordnung $(n-p)^3$. Die sonstigen Multiplikationen haben keinen großen Einfluss auf die Laufzeit und können aus diesem Grunde vernachlässigt werden.
Wird nun die Laufzeit beider Vorgehensweisen gegenübergestellt ergibt sich für einen Parametersatz folgendes:

Direkte Bestimmung der Inversen	Matrixzerlegung	
$\boldsymbol{f \cdot n^3}$	$\boldsymbol{f \cdot ((n-p)^3 + p^3)}$	(14) (a,b)

Werden nun k Parameter l-mal variiert und diese Variation findet lediglich in Matrix $\mathbf{E}$ (siehe (6)) statt, so ergeben sich folgende Laufzeiten:

$\boldsymbol{k \cdot l \cdot (f \cdot n^3)}$	$\boldsymbol{f \cdot p^3 + k \cdot l \cdot (f \cdot (n-p)^3)}$	(15) (a,b)

Es ist zu erkennen, dass eine geringere Laufzeit erreicht werden kann. Zur Verringerung der Laufzeit ist es demnach wichtig, dass nur ein kleiner Teil der Matrix verändert wird.

3 Anwendungsbeispiele

In diesem Kapitel wird zuerst ein einfaches Netzwerk analysiert. Daran soll die grundsätzliche Vorgehensweise gezeigt werden. Anschließend wird eine Punkt-zu-Punkt-Verbindung eines FlexRay Bussystems analysiert. Mit diesem Netzwerk soll gezeigt werden, dass eine Berechnung mit Matrixzerlegung schneller zu einem Ergebnis führt als die herkömmliche Berechnungsmethode.

3.1 Analyse eines einfachen Netzwerkes

In diesem Fall wird ein einfaches Netzwerk analysiert. Für dieses Netzwerk kann die Admittanzmatrix (Hypermatrix) per Hand aufgestellt und in vier Untermatrizen zerteilt werden. Es wird gezeigt, dass beide Ansätze zu demselben Ergebnis führen. Gegeben ist das folgende Netzwerk, die Induktivität L_1 und die Kapazität C_3 werden variiert:

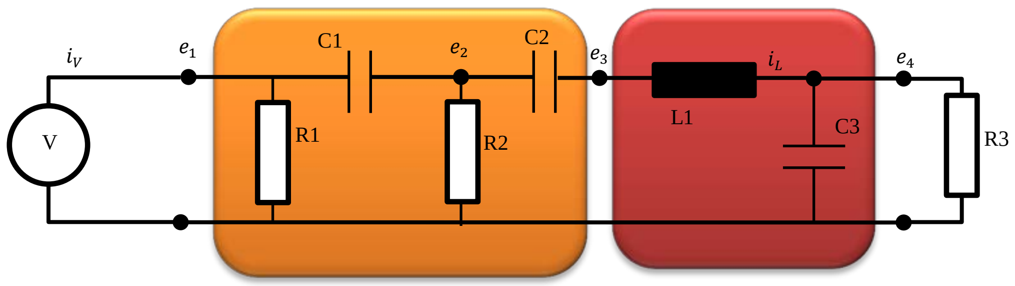


Bild 2: Einfacher Filter

In diesem Netzwerk gibt es 6 Unbekannte, die bestimmt werden müssen. Die Übermatrix ist eine $6x6$ Matrix:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+j\omega C_1 & -j\omega C_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -j\omega C_1 & \frac{1}{R_2}+j\omega C_1+j\omega C_2 & -j\omega C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d}{dt}C_2 & j\omega C_2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_3}+j\omega C_3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & j\omega L_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ i_v \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

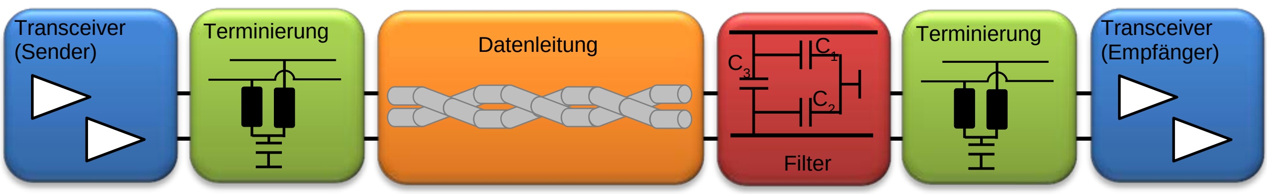
Die abgetrennte Untermatrix ($\mathbf{A}$) ist in (16) rot hinterlegt. Die Parametervariation findet in dem orange hinterlegten Teil der Matrix, der Matrix $\mathbf{E}$ nach Gleichung (6), statt. Werden jetzt bei einer gegebenen Frequenz die Filterparameter variiert, so muss bei dem konventionellen Ansatz für jeden Parametersatz die Berechnung neu durchgeführt werden. Bei der Matrixzerlegung muss nur die Matrix $\mathbf{E}$ verändert werden. In Tabelle 1 sind die Laufzeiten für das gegebene Beispiel dargestellt.

$k = 2$ $l = 100$	Konventioneller Ansatz	Matrixzerlegung	Relative Zeitersparnis [%]
Theoretische Laufzeit	$216 \cdot k \cdot l$ $= 43.200$	$27 + 27 \cdot k \cdot l$ $= 5427$	
Gesamtzeit [s]	1,392	0,469	~66%

Tabelle 1: Laufzeit - Einfacher Filter

3.2 Punkt-zu-Punkt-Verbindung eines Bussystems

In diesem Beispiel wird eine Punkt-zu-Punkt-Verbindung eines FlexRay-Bussystems analysiert (Bild 3). Zur Simulation der Signalintegrität in einem Bussystem ist es wichtig die Leitung möglichst genau nachzubilden, dafür wird die Leitung mit Hilfe von einzelnen Leitungsabschnitten kaskadiert nachgebildet. Die Leitungsparameter werden mit den geometrischen Eigenschaften und den Materialparametern der Leitung bestimmt [5]. In diesem Fall wird eine 1 m lange Leitung in 20 Teilleitungen unterteilt. Die Tabelle unter den Komponenten zeigt die jeweilige Anzahl der Einträge in der Übermatrix.



2	1	40	2	1	2

Bild 3: FlexRay System

Die Größe der Übermatrix, in diesem Fall $48x48$ Elementen, ist stark von der Art und der Anzahl der Leitungsstücke abhängig. Werden in dem System die Elemente des Filters optimiert, so müssen nur wenige Zeilen bzw. Spalten in der Matrix verändert werden. Wie in Bild 3 dargestellt besteht der Filter aus drei Kapazitäten, die variiert werden.

$k = 3$ $l = 10$	Konventioneller Ansatz	Hypermatrix	Relative Zeitersparnis [%]
Theoretische Laufzeit	$110.592 \cdot k \cdot l$ $= 3.317.760$	$79.507 + 125 \cdot k \cdot l$ $= 83.257$	
Gesamtzeit [s]	59,0	4,648	~92%

Tabelle 2: Laufzeit – Punkt-zu-Punkt Verbindung

Die Verwendung der Matrixzerlegung erzeugt eine Verringerung der Laufzeit, da bei der Matrixzerlegung weniger Berechnungen nötig sind, um zum Ergebnis zu gelangen. Im Vergleich zum konventionellen Ansatz benötigt die Berechnung mit der Matrixzerlegung und die damit verbunden kleinere Inverse die gebildet werden muss, in diesem Beispiel, nur ca. 8 % der Simulationszeit.

4 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurde eine Matrixzerlegung vorgestellt, mit deren Hilfe es möglich ist, eine Reduktion der Laufzeit für eine Netzwerksimulation bei sich wiederholenden Berechnungen mit nur gering veränderten Admittanzmatrizen zu erreichen. Wenn nur ein kleiner Teil einer Schaltung, beispielsweise bei einer Optimierungsuntersuchung, verändert werden muss, ist eine geringere Laufzeit als bei einer kompletten LU-Zerlegung möglich. Dies wurde sowohl theoretisch als auch mit Beispielen gezeigt.
Die Matrixzerlegung kann auf beliebig komplexe Netzwerke angewendet werden. Auch nichtlineare Bauteile lassen sich in diese Netzwerke integrieren und können somit schneller analysiert werden. Die verringerte Simulationszeit hängt stark von der Implementierung und der verwendeten Softwaresprache ab.
Gerade im Bereich der EMV, wo meist nur kleine Teile einer Schaltung, z.B. eine Filterstruktur, variiert werden, besitzt dieses Verfahren gegenüber der herkömmlichen Berechnung der Inversen ein großes Potential. Optimierungen können somit in kürzerer Zeit durchgeführt werden.

5 Danksagung

Die Arbeit für diesen Konferenzbeitrag wurde teilweise von der Europäischen Union (EFRE), vom Ministerium für Wirtschaft, Energie, Industrie, Mittelstand und Handwerk des Landes Nordrhein-Westfalen (MWEIMH NRW) und dem Ministerium für Klimaschutz, Umwelt, Landwirtschaft, Natur- und Verbraucherschutz des Landes Nordrhein-Westfalen (MUNLV NRW) als Teil des Projekts TIE-IN (Referenznummer 64.65.69-EM-1022A) gefördert.

6 Literatur

[1] W. Göhler und B. Ralle, *Formelsammlung höhere Mathematik,* 16. Auflage. Frankfurt am Main: Deutsch, 2005. ISBN: 9783817117543.

[2] W. J. McCalla, *Fundamentals of computer-aided circuit simulation*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1987], c1988. ISBN: 0898382483.

[3] J. Vlach und K. Singhal, *Computer methods for circuit analysis and design,* 2. Auflage. New York: Van Nostrand Reinhold, 1994. ISBN: 0-442-01194-6.

[4] J. Wissmann und K.-D. Sarnes, *Finite Elemente in der Strukturmechanik ; mit 11 Tabellen*. Berlin [u.a.]: Springer, 2006. ISBN: 3540618368.

[5] C. R. Paul, *Analysis of multiconductor transmission lines*. New York, NY [u.a.]: Wiley, 1994. ISBN: 9780471020806.